

محاضرات الدفتر

القسم : تحليل رياضيات السنة : الرابعة مادة : منطق رياضيات المحاضرة : 1

1- المورفيزم، الإيزومورفيزم، الترتيبات.

تعريف 1.1

إذا كانت P دالة من المجموعة M إلى المجموعة M' (أي $P: M \rightarrow M'$)

(أي $P: M \rightarrow M'$)

$$P: (M, \leq) \rightarrow (M', \leq)$$

نقول عن P إنها دالة

إذا مورفيزم ترتيبى إذا دالة متناظرة إذا كانت

$$x \leq y \Rightarrow P(x) \leq P(y) ; \forall x, y \in M$$

وبالإضافة إلى أن P مورفيزم ترتيبى كانت P متباينة و P^{-1} مورفيزم ترتيبى فإشراعى P في هذه الحالة إيزومورفيزم ترتيبى.

1.2

ونقول عن دالة P عاكسة ترتيب (دالة متناظرة) :

إذا كانت

$$x \leq y \Rightarrow P(x) \geq P(y) ; \forall x, y \in M$$

وبالإضافة إلى كونها عاكسة ترتيب كانت P متباينة و P^{-1} مورفيزم عاكس ترتيب فإشراعى P إيزومورفيزم عاكس ترتيب.

ممكن أيضاً

$$P: (M, \leq) \rightarrow (M', \leq)$$

$$P(x) = x^3 ; \forall x \in \mathbb{R}$$

معرفتنا باركة

عند هاتين أن P إيزومورفيزم ترتيبى.

2- دالة

إذا كانت P إيزومورفيزم ترتيبى للمجموعة (M, \leq) في المجموعة (M', \leq)

وكانت المجموعة الجزئية A من M لها أعلى أصغر a عندها فإن

$$P(a) \text{ (صورة هذا العنصر) هو أعلى أصغر في المجموعة } P(A)$$

البرهان

ليكن y عنصراً اختيارياً من $P(A)$ عندها يوجد عن $x \in A$

$y = P(x)$ و $x \in A$ و A له أعلى أصغر a عندها

$x \leq a$ و P مورفيزم ترتيبى فإن

$$y = P(x) \leq P(a)$$

محاضرات الدفتر

المحاضرة :

المادة :

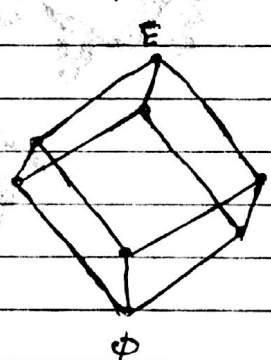
السنة :

القسم :

$\Leftarrow F(A)$ هو دالة المجموعة $F(A)$
 - ليكن F دالة من A إلى M حيث $F(A)$ هي مجموعة F ايضاً موزونة
 ترتيباً إذا لم يكن $t \in M$ بحيث $F(t) = d$ ومنه فإن:
 $F(t) \leq F(A)$ وبالتالي $t \leq x$ وذلك لـ $x \in A$
 وهذا يعني ان t هو حد أعلى للمجموعة A ومنه t لفرق فإن
 $a \leq t$ $F(a) \leq F(t)$ ايضاً موزونة ترتيباً فإن:
 $F(a) \leq F(t) = d$ وهذا يعني ان
 $F(a) = \sup F(A)$

الآن لنتناول
 تعريف: مجموعة مرتبة جزئياً هي (E, \leq) حيث E هي مجموعة جزئية من \mathbb{R} و \leq هي علاقة ترتيب جزئي على E
 ايضاً $\sup \{a, b\} = a \vee b$ و $\inf \{a, b\} = a \wedge b$
 وتكتب بالرمز (E, \leq, \vee, \wedge)

وبما ان E تكون شبكة
 مثال 1- $E = \{a, b, c\}$
 $(\rho(E), \leq, \vee, \wedge)$



هذه هي المجموعة بالنسبة لهذه العمليات تكون شبكة
 $\{a, b\}$
 $\{a\} \vee \{b\} = \{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$
 شكل شبكة

مثال 2- \mathbb{N} مجموعة الأعداد الطبيعية (\mathbb{N}, \leq) المرتبة جزئياً بعلامة $a \leq b$
 $a \leq b \Leftrightarrow a \mid b$

محاضرات الدفتر

المحاضرة :

المادة :

السنة :

القسم :

هل يمكن ان تكون شبكة؟

$$a \vee b = \text{lcm}(a, b) \rightarrow$$

$$a \wedge b = \text{gcd}(a, b)$$

قاسم مشترك الاكبر

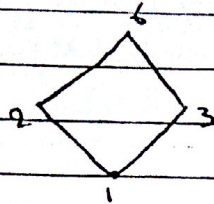
$D(6)$, $D(20)$, $D(30)$

$D(6) = \{1, 2, 3, 6\}$

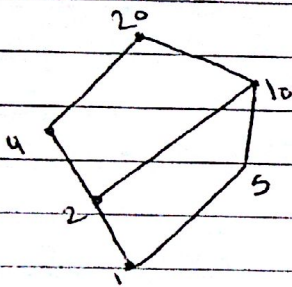
$(D(6), \vee, \wedge)$

مثال (3)

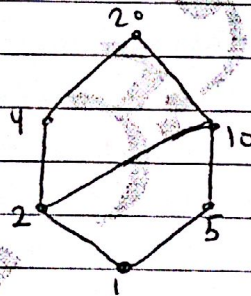
مرتبة جزئية بالانتماء لعلاقة التامة



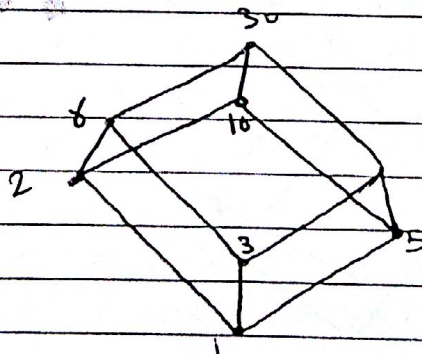
$D(20) = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$



أو



$D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$



مثال (4) اذا كانت (G) زمرة ما وليكن E مجموعة جزئية

الزمرة الجزئية من G تحت علاقة التماثل

ان المجموعة (E, \vee) مدمجة كما ان تقاطع اي زميرتين جزئيتين هو زمرة جزئية

محاضرات الدفتر

المحاضرة :

المادة :

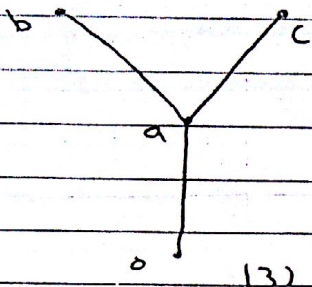
السنة :

القسم :

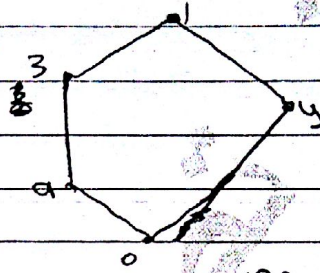
وبذلك هذا التقاطع هو إلى الأبد الأعظم كما أن إلى الأعلى الأصغر لهذه المجموعة هو الزمرة الجزئية المولدة بأصغرها زميرتين جزئيتين عندئذ نستطيع القول (E, A, B, C) زمرة الجزئية للزمرة G.

مثال :

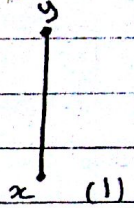
يسمى أي من الخطوط التالية - كـ زمرة كاي من زمرة كـ زمرة كـ



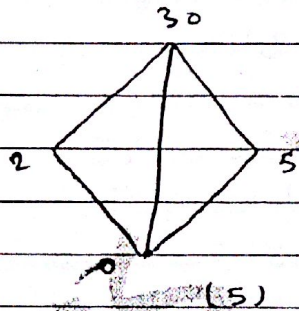
(1)



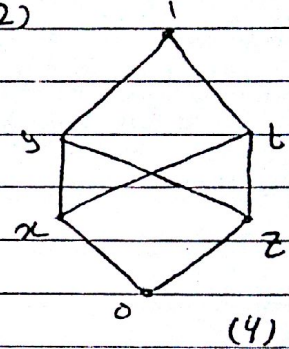
(2)



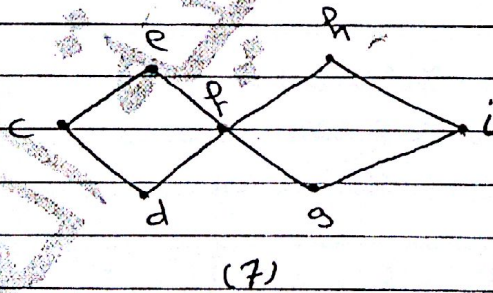
(3)



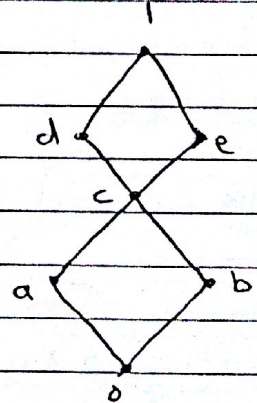
(4)



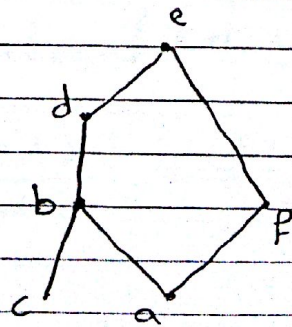
(5)



(6)



(7)



(8)

محاضرات الدفتر

المحاضرة :

المادة :

السنة :

القسم :

- (1) - يمكن شبكة .
- (2) - يمكن شبكة .
- (3) - لا يمكن شبكة لأن $\forall c$ غير موجود .
- (4) - لا يمكن شبكة لأن $y \wedge t = x$, $y \wedge t = z$ ~~المحدود غير موجود~~
- (5) - يمكن شبكة .
- (6) - يمكن شبكة .
- (7) - لا يمكن شبكة لأن $e \vee h$ غير موجود , $d \wedge g$ غير موجود
- (8) - لا يمكن شبكة لأن $c \wedge a$ غير موجود .

خواص الشبكات :

مبرهنة :

إذا كانت (E, \wedge, \vee, \perp) شبكة ما فإن عناصرها تحقق :

- (1) - خاصية الانعكاس $x \wedge x = x$, $x \vee x = x$
- (2) - خاصية التبادلية $x \wedge y = y \wedge x$, $x \vee y = y \vee x$
- (3) - خاصية التجميعية .

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$$

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$$

(4) - في أية شبكة تحقق خاصية الامتصاص :

$$x \wedge (x \vee y) = x$$

$$x \vee (x \wedge y) = x$$

الاثبات :

- (1) - ان $x \wedge x \leq x$ وبما ان $x \leq x$ فإن $x \leq x \wedge x$ في هذه الحالة ان $x \wedge x = x$ هو ما اردت منه

$$x \wedge y = \inf \{x, y\} = \inf \{y, x\} = y \wedge x$$

$$\underbrace{x \wedge (y \wedge z)}_a = \underbrace{(x \wedge y) \wedge z}_b$$

محاضرات الدفتر

المحاضرة :

المادة :

السنة :

القسم :

$$a = (x \wedge y) \wedge z \Rightarrow a \leq x \neq a \leq y \wedge z \Rightarrow a \leq x \neq a \leq y$$

$$\neq a \leq z$$

$$a \leq x \neq a \leq y \Rightarrow a \leq x \wedge y \neq a \leq z \Rightarrow$$

$$a \leq (x \wedge y) \wedge z = b \Rightarrow a \leq b \dots (1)$$

وبنفس الطريقة يتبع (2) $b \leq a$

$$x \wedge (x \vee y) = x \dots (4)$$

لنثبت من جهة أخرى

$$x \wedge (x \vee y) \leq x \dots (1)$$

$$x \leq x \vee y$$

وبما أن $x \leq x$ ، لهذا يمكن أن نكتب x هو عنصر أصغر من x و $x \vee y$ ومنه

$$x \leq x \wedge (x \vee y) \dots (2)$$

ومن (1) و (2) نتبع النتيجة المطلوبة

مبرهنة : $(E, \leq, \wedge, \vee, 1)$ و a, b عنصرين من E يتبع

ما يلي :

$$1) a \leq b \Rightarrow a \vee b = b$$

$$2) a \leq b \Rightarrow a \wedge b = a$$

انتهى داللي

انتهى المحاضرة

٨٨